Algèbre de Hopf d'incidence des posets de partitions semi-pointées

Bérénice Delcroix-Oger

Institut Camille Jordan (Lyon)

Jeudi 18 Décembre 2014

Sommaire

Sommaire

Partitions

Définition

Une partition d'un ensemble I est un ensemble de parties non vides de I deux à deux disjointes et qui recouvrent I.

Ensemble des partitions de $\{1, 2, 3, 4\}$

$$\{1, 2, 3, 4\}$$
$$\{1\}\{2, 3, 4\}, \{2\}\{1, 3, 4\}, \{3\}\{1, 2, 4\}, \{4\}\{1, 2, 3\}$$
$$\{1, 2\}\{3, 4\}, \{1, 3\}\{2, 4\}, \{1, 4\}\{2, 3\}$$
$$\{1, 2\}\{3\}\{4\}, \{1, 3\}\{2\}\{4\}, \{1, 4\}\{2\}\{3\},$$
$$\{2, 3\}\{1\}\{4\}, \{2, 4\}\{1\}\{3\}, \{3, 4\}\{1\}\{2\}$$
$$\{1\}\{2\}\{3\}\{4\}$$

Partitions semi-pointées

Définition

Une partition semi-pointée est une partition sur un ensemble de "pointable" (•) et un ensemble de "non pointable" (•) vérifiant :

Partitions semi-pointées

Définition

Une partition semi-pointée est une partition sur un ensemble de "pointable" (•) et un ensemble de "non pointable" (•) vérifiant :

$\{\bullet\ \bullet\ \bullet\} \quad \rightarrow$ ■ *(pointée en un pointable)*

$\{\bullet\ \bullet\ \bullet\} \quad \rightarrow$ ■ *(pointée en un pointable)* ou ■ *(non pointée)*

$\{\bullet\ \bullet\} \quad \rightarrow$ ■ *(non pointée)*

Partitions semi-pointées

$$
\begin{array}{ccc}
1,\ 2,\ 3 & 1,\ 2,\ 3,\ 4 & 1,\ 2 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\{\dot{1}, 2, 3\} & \{\dot{1}, 2, 3, 4\} & \{1, 2\} \\
\{1, \dot{2}, 3\} & \{1, \dot{2}, 3, 4\} & \\
\{1, 2, \dot{3}\} & \{1, 2, 3, 4\} & \\
\{\dot{1}, 2\}\{\dot{3}\} & \{1, \dot{2}\}\{3, 4\} & \\
\{\dot{1}\}\{\dot{2}, 3\} & \{\dot{2}, 4\}\{\dot{1}, 3\} & \\
\{\dot{1}\}\{\dot{2}\}\{\dot{3}\} & \{2, 4\}\ \{1, 3\} & \\
\vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Partitions non pointées, pointées et semi-pointées

Série génératrice des partitions semi-pointées :

$$\exp\left((x+1)e^{x+y} - e^{x}\right) - 1$$

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	5	15	52
1	1	3	8	25	89	354
2	3	10	35	133	552	2493
3	10	41	173	768	3637	
4	41	196	953	4815		
5	196	1057	5785			
6	1057	6322				
7	6322					

Partitions non pointées, pointées et semi-pointées

Série génératrice des partitions semi-pointées :

$$\exp\left((x+1)e^{x+y} - e^{x}\right) - 1$$

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	5	15	52
1	1	3	8	25	89	354
2	3	10	35	133	552	2493
3	10	41	173	768	3637	
4	41	196	953	4815		
5	196	1057	5785			
6	1057	6322				
7	6322					

$\rightarrow$ Nombres de Bell

Partitions non pointées, pointées et semi-pointées

Série génératrice des partitions semi-pointées :

$$\exp\left((x+1)e^{x+y} - e^{x}\right) - 1$$

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	5	15	52
1	1	3	8	25	89	354
2	3	10	35	133	552	2493
3	10	41	173	768	3637	
4	41	196	953	4815		
5	196	1057	5785			
6	1057	6322				
7	6322					

$\rightarrow$ Nombres de Bell

Les partitions semi-pointées sont des interpolations entre les partitions et les partitions pointées.

Un ordre partiel sur les partitions

Soit n, un entier naturel,

Définition

Le poset des partitions sur n éléments Π_n est le poset dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des partitions de n muni de l'ordre partiel suivant :

$$p_1 \leq p_2 \iff \text{toute part de } p_1 \text{ est union de parts de } p_2$$

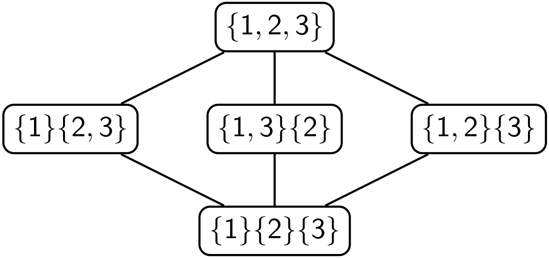
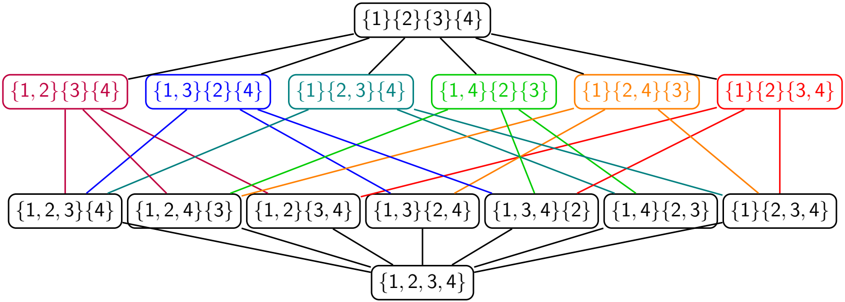


Figure : Le poset Π_3

Poset des partitions Π_4



Un ordre sur les partitions semi-pointées

Définition

Le poset des partitions semi-pointées sur un ensemble de "pointable" de taille ℓ et un ensemble de "non pointable" de taille p est l'ensemble des partitions semi-pointées sur ces deux ensembles, muni de l'ordre partiel suivant :

$$p_1 \leq p_2 \iff \text{toute part de } p_1 \text{ est union de parts de } p_2$$

Un ordre sur les partitions semi-pointées

Définition

Le poset des partitions semi-pointées sur un ensemble de "pointable" de taille ℓ et un ensemble de "non pointable" de taille p est l'ensemble des partitions semi-pointées sur ces deux ensembles, muni de l'ordre partiel suivant :

$$p_1 \leq p_2 \Longleftrightarrow \textit{toute part de } p_1 \textit{ est union de parts de } p_2$$

Et si

Un ordre sur les partitions semi-pointées

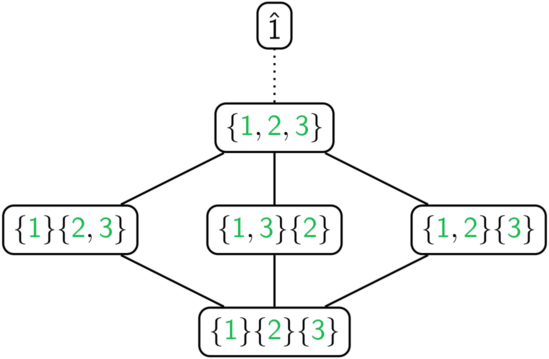
Définition

Le poset des partitions semi-pointées sur un ensemble de "pointable" de taille ℓ et un ensemble de "non pointable" de taille p est l'ensemble des partitions semi-pointées sur ces deux ensembles, muni de l'ordre partiel suivant :

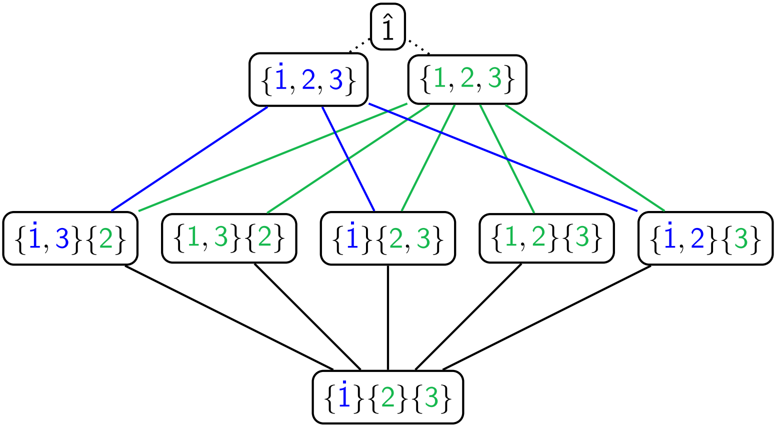
$$p_1 \leq p_2 \iff \textit{toute part de } p_1 \textit{ est union de parts de } p_2$$

Et si une part de p_1 est pointée en un élément x seulement si l'élément x était pointé dans une part de p_2.

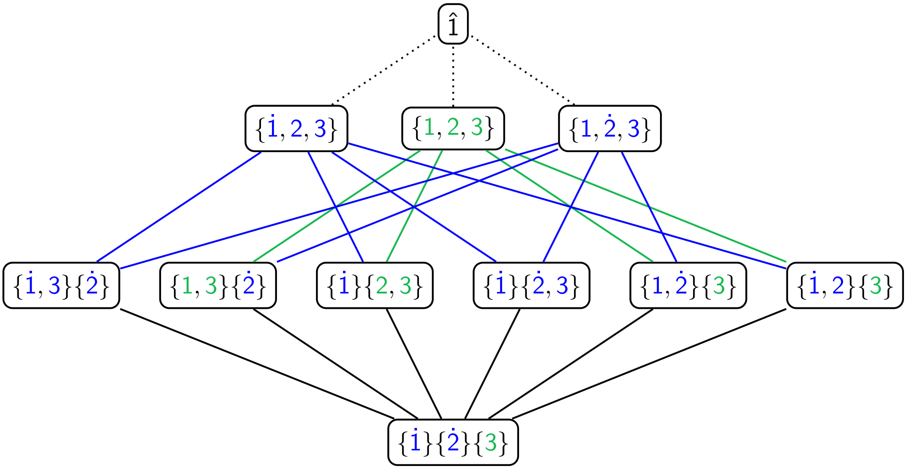
Poset des partitions semi-pointées $\Pi_3 = \Pi_{3,0}$



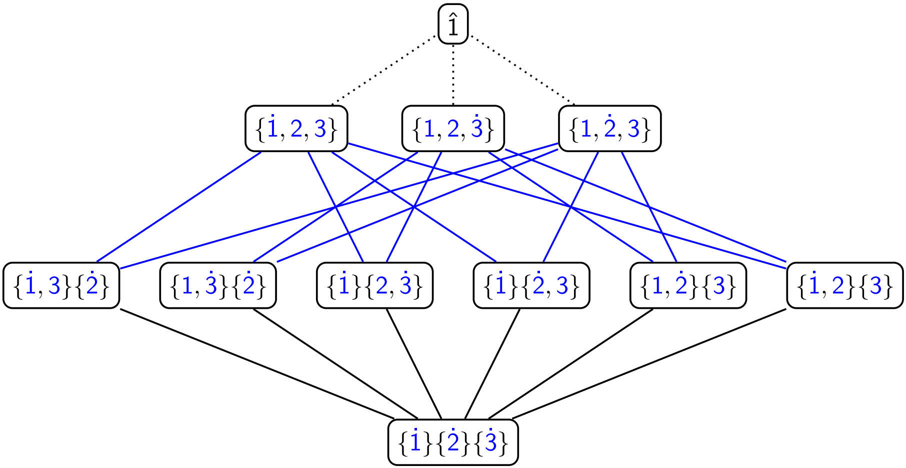
Poset des partitions semi-pointées $\Pi_{3,1}$



Poset des partitions semi-pointées $\Pi_{3,2}$



Poset des partitions semi-pointées $\Pi_{3,3}$



Algèbre de Hopf

Définition

Une algèbre de Hopf $(\mathcal{A}, \times, \eta, \Delta, \epsilon)$ *est une :*

- *algèbre* $(\mathcal{A}, \times, \eta)$
- *cogèbre* $(\mathcal{A}, \Delta, \epsilon)$

telles que Δ *et* ϵ *soient des morphismes d'algèbres.*

Algèbre de Hopf d'incidence

Définition

Le produit direct de deux posets P et Q est l'ensemble $P \times Q$ muni de l'ordre partiel suivant :

$$(x_1, x_2) \leq_{P_1 \times P_2} (y_1, y_2) \Longleftrightarrow x_i \leq_{P_i} y_i \forall i \in \{1, 2\}$$

Considérant une famille de posets bornés (p_n),
on peut lui associer une algèbre $\mathcal{P}$
dont le produit est le produit direct
et dont l'élément neutre noté $\mathbf{1}$ est le poset à un seul élément.

Si la famille (p_n) est stable par intervalles,
on peut lui associer un coproduit défini comme suit pour tout poset P :

$$\Delta[P] = \sum_{x \in P} [0_P, x] \otimes [x, 1_P],$$

Théorème (W.R. Schmitt, 1994)

L'algèbre $\mathcal{P}$ obtenue est une algèbre de Hopf appelée algèbre de Hopf d'incidence du poset.

Algèbre de Hopf de Faa di Bruno

L'algèbre de Hopf d'incidence des posets des partitions est l'algèbre de Hopf de Faa Di Bruno.

Le coproduit de cette algèbre de Hopf est donné par :

$$\Delta\left(\frac{\Pi_n}{n!}\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{N} \\ \sum_{i=1}^{n} j_i = k, \sum_{i=1}^{n} i j_i = n}} \binom{k}{j_1,\dots,j_n} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\Pi_i}{i!}\right)^{j_i} \otimes \frac{\Pi_k}{k!}.$$

Cette algèbre de Hopf est isomorphe à l'algèbre de Hopf $\mathbb{K}[a_1, a_2, \dots]$ sur les séries formelles $f(t) = t + \sum_{n\geq 2} f_n \frac{t^n}{n!}$ avec $\Delta(a_n)(f \otimes g) = a_n(f \circ g)$.

Notations

Nous notons :

- $\pi_{p,\ell}$ le minimum du poset des partitions semi-pointées avec ℓ "pointables" et p "non pointables",
- $\Pi^1_{p,\ell}$ l'intervalle maximal entre $\pi_{p,\ell}$ et la partition en une part pointée en 1,
- $\Pi^1_{p,\ell}$ l'intervalle maximal entre $\pi_{p,\ell}$ et la partition en une part non pointée.

Intervalles dans les posets de partitions semi-pointées

Proposition

Soit p une partition semi-pointée dans un poset de partitions semi-pointées $\Pi^{\theta}_{p,\ell}$.

- *L'intervalle $[p; M^{\theta}_{p,\ell}]$ de $\Pi^{\theta}_{p,\ell}$ est isomorphe à $\Pi^{\theta}_{j,l}$, où j est le nombre de parts dans p et l est le nombres de parts pointées dans p.*
- *L'intervalle $[\pi_{p,\ell}; p]$ de $\Pi^{\theta}_{p,\ell}$ est isomorphe à un produit de posets de partitions semi-pointées, avec un facteur $\Pi^{1}_{n_j,\ell_j}$ pour chaque part pointée de p de taille n_j avec ℓ_j éléments "pointables" et un facteur $\Pi^{0}_{n_j,\ell_j}$ pour chaque part non pointée de p de taille n_j avec ℓ_j éléments "pointables".*

Algèbre de Hopf d'incidence des posets de partitions semi-pointées

Nous considérons l'algèbre de Hopf d'incidence associée à la famille des $\Pi_{p,\ell}^{\theta}$.

Algèbre de Hopf d'incidence des posets de partitions semi-pointées

Nous considérons l'algèbre de Hopf d'incidence associée à la famille des $\Pi_{p,\ell}^{\theta}$.

Calculons son coproduit...

Calcul du coproduit

$$\Delta(\Pi^{\theta}_{p,\ell}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_j \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{j} p_i = p}} \sum_{\substack{\ell_1,\dots,\ell_j \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{j} \ell_i = \ell, \\ p_i + \ell_i > 0}} \sum_{\substack{\theta_1,\dots,\theta_j \in \{0;1\} \\ \theta_i \leq \ell_i, \\ \theta \leq \sum_{i=1}^{j} \theta_i \leq j-1+\theta}} c^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},\ell} \prod_{i=1}^{j} \Pi^{\theta_i}_{p_i,\ell_i} \otimes \Pi^{\theta}_{j,\sum_{i=1}^{j} \theta_i}$$

où $c^{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{p},\ell}$ est le nombre de partitions ayant j parts, avec dans chaque part $\ell_1, \dots, \ell_j$ éléments "pointables" et $p_1, \dots, p_j$ éléments "non pointables" et tel que la i^{me} part soit pointée si θ_i est 1 et non pointée sinon.

Théorème

Le coproduit de l'algèbre de Hopf d'incidence des partitions semi-pointées est donné par :

$$\Delta\left(\frac{\Pi^{\theta}_{k+l,k}}{l!(k-\theta)!}\right) = \sum_{p+q\geq 1}\sum_{(l_i,k_i)}\prod_{i=1}^{p}\frac{\Pi^{1}_{l_i+k_i,k_i}}{l_i!(k_i-1)!}\prod_{i=p+1}^{p+q}\frac{\Pi^{0}_{l_i+k_i,k_i}}{l_i!k_i!}\otimes\frac{\Pi^{\theta}_{p+q,p}}{q!(p-\theta)!},$$

où la seconde somme décrit l'ensemble des $p+q$-uplets $(l_1,\dots,l_{p+q})$ et $(k_1,\dots,k_{p+q})$ tels que :

- $l_1,\dots,l_p \geq 0$ *et* $l_{p+1},\dots,l_{p+q}\geq 1$,
- $k_1,\dots,k_p \geq 1$ *et* $k_{p+1},\dots,k_{p+q}\geq 0$,
- $\sum_{i=1}^{p+q} k_i = k$ *et* $\sum_{i=1}^{p+q} l_i = l$.

Identification aux séries formelles

Proposition

L'algèbre de Hopf d'incidence des posets de partitions semi-pointées est isomorphe à la structure d'algèbre de Hopf sur l'algèbre des polynômes en les variables $(a^{\theta}_{k,l})_{k,l\geq 1, \theta\in\{0,1\}}$ *donnée par la composition de paires de séries formelles* (F, G) *de la forme suivante :*

$$\begin{cases} F = x + \sum_{l,k\geq 1} a^0_{k,l} \frac{x^k}{k!}\frac{y^l}{l!}, \\ G = y + \sum_{l,k\geq 1} k a^1_{k,l} \frac{x^k}{k!}\frac{y^l}{l!}. \end{cases}$$

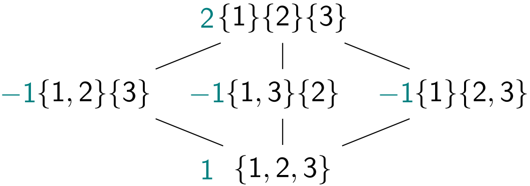
Nombre de Möbius

Définition

Pour tout poset P, sa fonction de Möbius est définie par :

$$\mu(x,x) = 1, \qquad \forall x \in P$$
$$\mu(x,y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z), \qquad \forall x < y \in P.$$

Si P est borné, son nombre de Möbius P est $\mu(P) := \mu(\hat{0},\hat{1})$.



Lien entre nombre de Möbius et algèbre de Hopf d'incidence

Un caractère d'une algèbre de Hopf d'incidence $\mathcal{H}$ est une application linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{Q}$.
La convolution suivante est définie sur tous caractères ϕ et ψ :

$$\phi * \psi(P) = \sum \phi(P_{(1)})\psi(P_{(2)}),$$

où $\Delta(P) = \sum P_{(1)} \otimes P_{(2)}$, avec la notation de Sweedler.
Les applications suivantes sont des caractères :

$$\zeta : P \mapsto 1,$$

et

$$\mu : P \mapsto \mu(P).$$

De plus, notant ϵ la counité de l'algèbre de Hopf,

$$\zeta * \mu = \mu * \zeta = \epsilon.$$

Applications : Calcul des nombres de Möbius

Les nombres de Möbius des intervalless $\Pi^0_{n,\ell}$ et $\Pi^1_{n,\ell}$ sont les coefficients respectifs de A et B, où A et B vérifient :

$$\begin{cases} (e^B - 1)e^A = x, \\ Ae^{A+B} = y. \end{cases}$$

Applications : Calcul des nombres de Möbius

Les nombres de Möbius des intervalless $\Pi^0_{n,\ell}$ et $\Pi^1_{n,\ell}$ sont les coefficients respectifs de A et B, où A et B vérifient :

$$\begin{cases} (e^B - 1)e^A = x, \\ Ae^{A+B} = y. \end{cases}$$

Nous obtenons alors par inversion de Lagrange :

$$A = \sum_{\ell \geq 1, p \geq 0} (-1)^{\ell+p-1} \frac{(\ell+p-1)!}{(\ell-1)!} (\ell+p)^{\ell-1} \frac{x^\ell y^p}{\ell! p!},$$

$$e^{A+B} - 1 = \sum_{\ell \geq 1, p \geq 0} (-1)^{\ell+p-1} \frac{(\ell+p-1)!}{(\ell-1)!} (\ell+p-1)^{\ell-1} \frac{x^\ell y^p}{\ell! p!},$$

Où sont les espèces et les hyperarbres ?

?

Merci de votre attention !